

การใช้รูปแบบ Van Hiele ในการพัฒนาการเรียนการสอนการพิสูจน์ทางเรขาคณิต สำหรับนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3

Using Van Hiele model to develop instruction in geometric proof for mathayomsuksa three students

อลงกรณ์ ตั้งสงวนธรรม^{a,*}, สิริพร ทิพย์คง^b, ชานนท์ จันทร์^b และ ชนิศวรา เลิศอมรพงษ์^b

Alongkorn Tangsa-nguantham^{a,*}, Siriporn Thipkong^b, Chanon Chuntra^b, and Chanisawara Lertamornpong^b

^a หลักสูตรศึกษาศาสตรดุษฎีบัณฑิต สาขาวิชาการสอนคณิตศาสตร์ คณะศึกษาศาสตร์ มหาวิทยาลัยเกษตรศาสตร์ กรุงเทพมหานคร 10900
Doctoral Program in Teaching Mathematics, Faculty of Education, Kasetsart University, Bangkok 10900, Thailand

^b ภาควิชาการศึกษา คณะศึกษาศาสตร์ มหาวิทยาลัยเกษตรศาสตร์ กรุงเทพมหานคร 10900
Department of Education, Faculty of Education, Kasetsart University, Bangkok 10900, Thailand

ARTICLE INFO

Article history:

Received 21 December 2016

Received in revised form 31 March 2017

Accepted 4 April 2017

Keywords:

geometric proof,
instructional model,
Van Hiele level

ABSTRACT

The development in Van Hiele levels of thinking was investigated to study mathematical learning achievement, and the geometric proof ability of mathayomsuksa three students. Purposive sampling was used to select the samples-44 mathayomsuksa three students at Ratchananthachan Samsenwittayalai 2 School, Bangkok in the second semester of the 2015 academic year and 60 mathayomsuksa three students at Surasakmontree School, Bangkok in the first semester of the 2016 academic year. The research instruments were lesson plans, mathematical learning achievement tests with a reliability score of .82, geometric proof ability tests, Van Hiele levels of thinking test, and record forms after using learning management. The results revealed that: 1) mathayomsuksa three students had development in Van Hiele level 3 of thinking at more than 60 percent (68.33%); 2) mathayomsuksa three students had mathematical learning achievement on reasoning about triangles and quadrilaterals at more than 60 percent of criteria (69.50%); 3) and mathayomsuksa three students had geometric proof ability after using the instructional model in geometric proof at more than 60 percent of criteria (68.68%).

* Corresponding author.

E-mail address: atangirl@gmail.com

บทคัดย่อ

วัตถุประสงค์ของการวิจัยครั้งนี้ 1) ศึกษาพัฒนาการในระดับชั้นการคิดทางเรขาคณิตของ Van Hiele 2) ศึกษาผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนคณิตศาสตร์ และ 3) ศึกษาความสามารถในการพิสูจน์ทางเรขาคณิต ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 กลุ่มตัวอย่างเป็นนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 โรงเรียนราชันนทหารจารย์สามเสนวิทยาลัย 2 กรุงเทพมหานคร ที่ศึกษาอยู่ในภาคเรียนที่ 2 ปีการศึกษา 2558 จำนวน 44 คน และนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 โรงเรียนสุรศักดิ์มนตรี กรุงเทพมหานคร ที่ศึกษาอยู่ในภาคเรียนที่ 1 ปีการศึกษา 2559 จำนวน 60 คน ซึ่งได้มาจากการเลือกแบบเจาะจง เครื่องมือที่ใช้ในการวิจัย คือ แผนการจัดการเรียนรู้ แบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนคณิตศาสตร์ ซึ่งมีค่าความเที่ยง 0.82 แบบวัดความสามารถในการพิสูจน์ทางเรขาคณิต แบบวัดระดับชั้นการคิดทางเรขาคณิตของ Van Hiele และแบบบันทึกหลังการจัดการเรียนรู้ ผลการวิจัยปรากฏว่า 1) นักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 มีพัฒนาการในระดับชั้นการคิดทางเรขาคณิตของ Van Hiele อยู่ในระดับ 3 มากกว่า 60 เปอร์เซ็นต์ โดยมีจำนวนนักเรียนคิดเป็น ร้อยละ 68.33 2) ผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนคณิตศาสตร์ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 เรื่องการให้เหตุผลเกี่ยวกับรูปสามเหลี่ยมและรูปสี่เหลี่ยมหลังการเรียนสูงกว่าเกณฑ์ 60 เปอร์เซ็นต์ โดยมีคะแนนคิดเป็นร้อยละ 69.50 3) นักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 มีความสามารถในการพิสูจน์ทางเรขาคณิต หลังการใช้รูปแบบการเรียนการสอนการพิสูจน์ทางเรขาคณิต สูงกว่าเกณฑ์ 60 เปอร์เซ็นต์ โดยมีคะแนนคิดเป็นร้อยละ 68.68

คำสำคัญ: การพิสูจน์ทางเรขาคณิต รูปแบบการเรียนการสอนระดับชั้นของ Van Hiele

บทนำ

หลักสูตรแกนกลางการศึกษาขั้นพื้นฐาน พุทธศักราช 2551 ได้ระบุการให้เหตุผล ตลอดจนการพิสูจน์ เป็นหนึ่งในทักษะและกระบวนการทางคณิตศาสตร์ โดยสถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี (สสวท.) ได้กล่าวว่าการให้เหตุผลเป็นทักษะและกระบวนการที่ส่งเสริมให้นักเรียนรู้จักคิดอย่างมีเหตุผล คิดอย่างเป็นระบบ สามารถวิเคราะห์ปัญหาและสถานการณ์ได้อย่างถี่ถ้วนรอบคอบ สามารถคาดการณ์วางแผน ตัดสินใจ และแก้ปัญหาได้อย่างถูกต้องเหมาะสม การคิด

อย่างมีเหตุผลเป็นเครื่องมือสำคัญที่นักเรียนสามารถนำคิดตัวไปใช้ในการพัฒนาตนเองในการเรียนรู้สิ่งใหม่ๆ ในการทำงานและการดำรงชีวิต ดังนั้น การคิดอย่างมีเหตุผลจึงเป็นหัวใจสำคัญของการสอนคณิตศาสตร์ นอกจากนี้ยังมีงานวิจัยเป็นจำนวนมากที่ยืนยันว่า การสอนให้นักเรียนเรียนด้วยความเข้าใจอย่างมีเหตุผล ดีกว่าการสอนแบบให้จดจำ การสอนคณิตศาสตร์อย่างเป็นเหตุเป็นผลจะทำให้นักเรียนมีเจตคติที่ดีต่อวิชาคณิตศาสตร์ สามารถจดจำได้ดีและนานกว่าเดิม

นอกจากนี้ National Council of Teachers of Mathematics (NCTM, 2000) ได้ระบุว่า การให้เหตุผลและการพิสูจน์ควรเป็นส่วนหนึ่งในประสบการณ์การเรียนรู้ทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนตั้งแต่ระดับปฐมวัย (Prekindergarten) จนถึงชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 6 (grade 12) ซึ่งในการจัดการเรียนการสอน นักเรียนต้องมีความสามารถดังนี้ เห็นคุณค่าของการให้เหตุผลและการพิสูจน์เช่นเดียวกับพื้นฐานที่คาดหวังของคณิตศาสตร์ สร้างและสืบเสาะข้อความทางคณิตศาสตร์พัฒนาและประเมินการอ้างเหตุผลและการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์เลือกและใช้รูปแบบการให้เหตุผลและวิธีการพิสูจน์ได้อย่างหลากหลาย การที่ NCTM หรือ สภาครูคณิตศาสตร์แห่งชาติของสหรัฐอเมริกา ได้กำหนดการให้เหตุผลและการพิสูจน์ไว้ในหนังสือหลักและมาตรฐานสำหรับคณิตศาสตร์ในโรงเรียนและสถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี (สสวท.) ได้ระบุไว้ในหลักสูตรแกนกลางการศึกษาขั้นพื้นฐาน พุทธศักราช 2551 สารที่ 6 การให้เหตุผลและการพิสูจน์เป็นด้านหนึ่งในทักษะและกระบวนการทางคณิตศาสตร์ เนื่องด้วยการพิสูจน์เป็นสิ่งจำเป็นสำหรับคณิตศาสตร์ เพราะการพิสูจน์จะแสดงให้เห็นถึงเหตุผลที่จะยืนยันว่าความรู้ทางคณิตศาสตร์นั้นจริงหรือไม่ ขณะที่ทักษะการให้เหตุผลและการเรียบเรียงเหตุผลเป็นสิ่งที่จำเป็นในการพิสูจน์ อีกทั้งเป็นการเพิ่มพูนทักษะการคิดวิเคราะห์รวมทั้งทำให้เกิดข้อค้นพบเกี่ยวกับความจริงทางคณิตศาสตร์ มีวิธีการพิสูจน์หลายวิธีที่นำไปสู่ข้อสรุปทางคณิตศาสตร์ การพิสูจน์เหมือนเกมฝึกสมองที่สามารถทำให้สนุกและได้พบความจริง (Donna, 2012) แต่ในการพิสูจน์ทางเรขาคณิตมักพบปัญหาว่า นักเรียนไม่สามารถเริ่มต้นการพิสูจน์ได้ ตั้งแต่ไม่สามารถสร้างรูปเรขาคณิตตามเงื่อนไขของโจทย์ ไม่ทราบที่โจทย์ต้องการอะไร และไม่สามารถนำความรู้ที่เรียนมาแล้วมาใช้ได้ ดังนั้น ครูควรใช้คำถามให้นักเรียนวิเคราะห์ย้อนกลับจากสิ่งที่ต้องการพิสูจน์ไปสู่สิ่งที่โจทย์กำหนดให้ (สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และ

เทคโนโลยี, 2555ช) ซึ่งสอดคล้องกับ Golzy (2008) ที่ได้กล่าวว่าการพิสูจน์เป็นสิ่งสำคัญในการเรียนรู้คณิตศาสตร์ แต่ก็เป็นเรื่องยากที่จะสอนนักเรียนและมักมีปัญหาในการเริ่มต้นการพิสูจน์ และ Lee (2011) ได้กล่าวว่า นักเรียนมีความยากลำบากในการให้เหตุผลที่มีความหมายเชิงตรรกะ และการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ ส่วน Bieda (2010) ได้กล่าวไว้ในบทความวิจัยว่า การอภิปรายเกี่ยวกับวิชาคณิตศาสตร์ในโรงเรียน บ่อยครั้งที่มีการพูดถึงความสำคัญของการให้เหตุผลและการพิสูจน์ เพื่อเป็นการสร้างความรู้ความเข้าใจของนักเรียนด้านคณิตศาสตร์ แต่ถึงอย่างไรก็ตามยังมีงานวิจัยจำนวนน้อยที่ตรวจสอบว่าครูออกแบบงานให้นักเรียนได้ลงมือปฏิบัติอย่างไร เพื่อส่งเสริมนักเรียนในการแสดงเหตุผลและการพิสูจน์ในชั้นเรียน แม้ว่าจะมีงานเขียนอยู่มากมายเรื่องความสามารถของนักเรียนในการสร้างและทำความเข้าใจเกี่ยวกับการตรวจสอบความถูกต้อง แต่ก็ยังมีความรู้เกี่ยวกับการใช้ความรู้ความชำนาญอย่างไรในการแสดงเหตุผลและการพิสูจน์ในการสอนคณิตศาสตร์ในโรงเรียน

จากการศึกษาเอกสารและงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง ทำให้ผู้วิจัยทราบว่า การเรียนการสอนเกี่ยวกับการให้เหตุผลและการพิสูจน์ ซึ่งเป็นส่วนหนึ่งในทักษะและกระบวนการทางคณิตศาสตร์ ยังเป็นปัญหาสำหรับนักเรียน ฉะนั้นการที่จะพัฒนานักเรียนในด้านนี้ จำเป็นต้องพัฒนารูปแบบการเรียนการสอนอย่างเป็นระบบ และต่อเนื่องบนพื้นฐานของทฤษฎีการเรียนรู้ หลักการแนวคิดการจัดการเรียนการสอน ซึ่งระบบการเรียนการสอนที่ผู้วิจัยใช้เป็นแนวทางในการพัฒนารูปแบบการเรียนการสอนนั้น จะมีความเกี่ยวเนื่องสัมพันธ์กัน โดยเริ่มจากการวิเคราะห์การออกแบบ การพัฒนา การนำไปใช้ และการประเมินผล

เนื่องจากการเรียนการสอนเป็นทั้งศาสตร์และศิลป์ การที่นักเรียนจะเข้าใจเนื้อหาสาระที่ครูสอนหรือไม่ ขึ้นอยู่กับ การออกแบบการเรียนการสอนของครู ฉะนั้นไม่ว่ากาลเวลาจะเปลี่ยนแปลงไปอย่างไร ครูยังคงเป็นผู้ที่ต้องประสิทธิ์ประสาทความรู้ให้กับนักเรียน แต่วิธีการและเทคนิคจะแตกต่างกันไปตามเนื้อหา ที่จะสอน และเพื่อให้การเรียนการสอนเรขาคณิต โดยเฉพาะอย่างยิ่งการให้เหตุผลและการพิสูจน์ซึ่งเป็นสิ่งที่ยากสำหรับนักเรียนมาทุกยุคทุกสมัย มีความน่าสนใจ น่าติดตาม น่าตื่นเต้น ท้าทาย และง่ายต่อการเรียนรู้ ผู้วิจัยจึงพัฒนารูปแบบการเรียนการสอนการพิสูจน์ทางเรขาคณิต สำหรับนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 เพื่อให้ให้นักเรียนสามารถให้เหตุผลในการพิสูจน์ทางเรขาคณิต ได้อย่างถูกต้อง และสามารถนำความรู้ไปใช้ในชีวิตประจำวัน ได้อย่างมีประสิทธิภาพ

วัตถุประสงค์

1. ศึกษาพัฒนาการในระดับขั้นการคิดทางเรขาคณิตของ Van Hiele ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3
2. ศึกษาผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนคณิตศาสตร์ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3
3. ศึกษาความสามารถในการพิสูจน์ทางเรขาคณิตของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3

การตรวจเอกสาร

ระดับขั้นการคิดทางเรขาคณิตของ Van Hiele

รูปแบบของ Van Hiele ประกอบด้วยระดับขั้นการคิดจากง่ายไปยากหรือสลับซับซ้อนมากขึ้น ดังรายละเอียดต่อไปนี้ (สิริพร, 2532)

ขั้น 0 หรือขั้นพื้นฐาน : การมองเห็น (Visualization) นักเรียนสามารถบอกชื่อรูปภาพที่มองเห็น เช่น รูปสี่เหลี่ยมจัตุรัส แต่ในขั้นนี้ นักเรียนไม่สามารถบอกคุณลักษณะส่วนย่อยได้

ขั้น 1 : การวิเคราะห์ (Analysis) นักเรียนสามารถวิเคราะห์ความคิดรวบยอดเกี่ยวกับรูปเรขาคณิตสองมิติ ได้ชัดเจนมากขึ้นกว่าขั้นพื้นฐาน สามารถบอกสมบัติของรูปเรขาคณิตสองมิติ เช่น รูปสี่เหลี่ยมจัตุรัส เป็นรูปสี่เหลี่ยมที่มีด้านทั้งสี่ยาวเท่ากัน และมุมทุกมุมเป็นมุมฉาก

ขั้น 2 : การพิสูจน์อย่างไม่เป็นแบบแผน (Informal Deduction) นักเรียนสามารถบอกรายละเอียดปลีกย่อย เกี่ยวกับสมบัติของรูปต่างๆ ทางเรขาคณิต สามารถเปรียบเทียบและบอกความสัมพันธ์ที่เกี่ยวข้องกันได้ เช่น รูปสี่เหลี่ยมใดๆ ด้านตรงข้ามขนานกันและยาวเท่ากันแล้วมุมตรงข้ามของรูปสี่เหลี่ยมนั้นจะต้องเท่ากัน รูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสคือรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้าที่มีด้านทั้งสี่ยาวเท่ากัน เป็นต้น ถึงแม้ว่านักเรียนจะยังไม่สามารถพิสูจน์ได้ ในขั้นนี้ นักเรียนสามารถเข้าใจคำจำกัดความต่างๆ มีการอภิปรายให้เหตุผลอย่างไม่เป็นแบบแผน ในบางครั้งนักเรียนอาจจะตอบว่า “เข้าใจ แต่อธิบายไม่ได้”

ขั้น 3 : การพิสูจน์อย่างมีแบบแผน (Formal Deduction) นักเรียนสามารถเข้าใจการพิสูจน์ที่มีกฎเกณฑ์ ขึ้นอยู่กับ การพิสูจน์ และสามารถพิสูจน์ได้ โดยทราบว่าอะไรคือสิ่งที่กำหนดให้ และอะไรคือสิ่งที่ต้องการพิสูจน์ นักเรียนรู้จักตั้งกฎเกณฑ์และข้อโต้แย้งในการคิดไปตามลำดับเหตุผล ทราบว่าทำไมสิ่งที่กำลังพิสูจน์อยู่เป็นจริงและเป็นไปได้ อย่างไรก็ตามนักเรียนอาจจะพิสูจน์สิ่งที่ต้องการจะพิสูจน์นั้น ได้มากกว่าหนึ่งวิธี

ขั้น 4 : การคิดขั้นสุดยอด (Rigor) นักเรียนสามารถคิดอย่างนามธรรม สามารถเปรียบเทียบระบบต่างๆ เช่น การเปรียบเทียบสัจพจน์ (Axiom) ทฤษฎี (Theory) และเรขาคณิตนอกระบบยูคลิด (Non-Euclidean Geometry) นักเรียนสามารถจัดทฤษฎีต่างๆ เข้าเป็นระบบระเบียบ และสร้างทฤษฎีใหม่ๆ ทางเรขาคณิต คำถาม ที่อาจจะใช้ถามนักเรียน ได้แก่ อะไรจะเกิดขึ้นในการเรียนวิชาเรขาคณิต ถ้าไม่มีทฤษฎีเกี่ยวกับเส้นขนานคู่หนึ่ง และมีเส้นตรงอีกเส้นหนึ่งตัดขวาง

การพิสูจน์ทางเรขาคณิต

การให้เหตุผลและการพิสูจน์ทางเรขาคณิต มีความสำคัญต่อการหาข้อสรุปที่เป็นเหตุเป็นผล และอิงตามหลักการทางคณิตศาสตร์ ผู้สอนควรฝึกให้ผู้เรียนพิสูจน์อย่างไม่เป็นทางการ (Informal proof) ก่อน เพื่อให้ผู้เรียนคุ้นเคยกับการคิดลักษณะต่างๆ เช่น การคิดวิเคราะห์ การคิดเชิงตรรกะ จากนั้นจึงค่อยฝึกการพิสูจน์อย่างเป็นทางการ (Formal proof) ที่ต้องมีการใช้ทฤษฎีบท กฎ สูตร บทนิยาม และสมบัติทางเรขาคณิตมาประกอบอย่างสมเหตุสมผล การให้เหตุผลและการพิสูจน์ทางเรขาคณิตอาจเริ่มจากการใช้ปัญหาทางเรขาคณิตที่ไม่ซับซ้อน มีขั้นตอนการคิดและการหาคำตอบที่ไม่ยุ่งยาก ไปจนถึงปัญหาที่ต้องการการเชื่อมโยงความรู้ต่างๆ ทางคณิตศาสตร์ กระบวนการในการให้เหตุผลและการพิสูจน์ทางเรขาคณิตจะช่วยให้ผู้เรียนเห็นว่าคุณสมบัติคณิตศาสตร์มีระบบ ระเบียบ แบบแผน เป็นจริง สมเหตุสมผล และสามารถพิสูจน์ได้ (อัมพร, 2557)

สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี (2557) ได้กล่าวว่า การพิสูจน์เป็นขั้นตอนสำคัญขั้นตอนหนึ่งสำหรับการค้นคว้าทางคณิตศาสตร์ อย่างไรก็ตามมีข้อสังเกตว่าการพิสูจน์เชิงคณิตศาสตร์ มีข้อแตกต่างกับการพิสูจน์ในทางวิทยาศาสตร์อยู่บ้าง กล่าวคือในทางคณิตศาสตร์ การพิสูจน์คือการแสดง (ชี้แจง อธิบาย) ให้เห็นว่าจริงด้วยเหตุผลเชิงตรรกศาสตร์ (การให้เหตุผลแบบนิรนัย) ในขณะที่การพิสูจน์ทางวิทยาศาสตร์ทำได้โดยการทดลอง หรือการสังเกตปรากฏการณ์ (การให้เหตุผลแบบอุปนัย) ซึ่งอาศัยผลลัพธ์ที่เกิดขึ้นซ้ำๆ กันหลายๆ ครั้ง นำไปสู่ข้อสรุปที่เป็นนัยทั่วไป สิ่งที่ต้องการการพิสูจน์ ได้แก่ ทฤษฎีบทซึ่งคือประพจน์ที่เป็นจริง และไม่ใช่สัจพจน์ หรือบทนิยามในการนำเสนอองค์ความรู้ทางคณิตศาสตร์ ไม่ว่าจะเป็นในรูปแบบบทความในวารสารเชิงวิชาการ ตำรา หรือการเรียนการสอน จะพบเสมอว่าจะต้องมีการดำเนินการพิสูจน์ข้อความต่างๆ ที่กล่าวอ้างแต่ในฐานะผู้เรียน หรือผู้น้ององค์ความรู้ทางคณิตศาสตร์ไปใช้ มักมีข้ออ้างว่า ไม่เห็นจำเป็นต้องทราบวิธีการพิสูจน์ หรือเข้าใจบทพิสูจน์ เพราะองค์ความรู้ที่ต้องการเรียนรู้ หรือนำไปใช้นั้น

เป็นองค์ความรู้ที่เป็นมาตรฐาน ได้รับการยอมรับ และตรวจสอบโดยนักคณิตศาสตร์มาแล้วว่าเป็นจริง

จากที่กล่าวมาจะสรุปความหมายของการพิสูจน์ได้ว่าการพิสูจน์ คือ การแสดงให้เห็นว่าข้อความที่กำลังพิสูจน์อยู่นั้นเป็นจริง โดยการเชื่อมโยงจากเหตุ (สิ่งที่ทราบว่าเป็นจริง) ไปสู่ผล (ข้อสรุป ที่ต้องการพิสูจน์ หรือต้องการนำไปกล่าวอ้างต่อไป) ผ่านการอ้างที่สมเหตุสมผล ดังนั้นสรุปได้ว่า การพิสูจน์เป็นเรื่องที่มีความจำเป็นต่อทุกคนทั้งในเรื่องของการเรียนการสอนในโรงเรียน และเรื่องที่เกี่ยวข้องกับชีวิตประจำวัน และนี่เป็นเหตุผลว่าทำไมจึงต้องมีการส่งเสริมความสามารถของนักเรียนทางด้าน การให้เหตุผลและการพิสูจน์

สำหรับวิธีการสอนพิสูจน์เรขาคณิตนั้น ยูพิน (2545) ได้ให้แนวทางในการสอนพิสูจน์เรขาคณิต ไว้ดังนี้

1. การสอนทฤษฎีบท มีขั้นตอนดังต่อไปนี้

1.1 หาวิธีการให้ผู้เรียนสรุปเนื้อหาทฤษฎีบทด้วยตนเอง ซึ่งอาจจะใช้การสาธิตของครู การทดลอง การใช้เหตุผล การใช้สื่อการเรียนการสอนสำเร็จรูป แล้วให้ผู้เรียนรู้จักแยกแยะเหตุและผล

1.2 ให้ผู้เรียนบอกสิ่งที่กำหนดให้และสิ่งที่ต้องการพิสูจน์

1.3 เลือกวิธีการพิสูจน์ โดยมากใช้การวิเคราะห์จากผลไปสู่เหตุ แล้วเรียบเรียงจากเหตุไปสู่ผล แต่บางข้ออาจจะใช้การสังเคราะห์ หรือบางข้ออาจจะใช้การวิเคราะห์และสังเคราะห์ร่วมกัน ทั้งนี้ขึ้นอยู่กับโจทย์

2. การพิสูจน์แบบฝึกหัด

2.1 ให้ผู้เรียนอ่านโจทย์ให้เข้าใจ แยกเหตุและผล หรือแยกสิ่งที่กำหนดให้และสิ่งที่ต้องการพิสูจน์ ถ้าผู้เรียนไม่เข้าใจและไม่สามารถแยกได้ จะต้องพยายามให้ฝึกจนกว่าจะแยกได้

2.2 เขียนรูปประกอบ

2.3 การพิสูจน์ จะเลือกวิธีวิเคราะห์ หรือสังเคราะห์ หรือใช้การวิเคราะห์ร่วมกับสังเคราะห์จะต้องพิจารณาให้เหมาะสมกับเนื้อหา

3. การสอนบทสร้าง

3.1 ผู้สอนใช้คำถามและแสดงการสร้างตามลำดับ ผู้เรียนก็สร้างตาม ผู้สอนจะเขียนกระดานดำ แสดงวิธีสร้างทีละขั้นตอนไปพร้อมๆ กัน อย่าสอนจนจบแล้วถามผู้เรียนอีกว่าสร้างอย่างไรหรือถ้าเป็นเรื่องง่ายก็ให้ผู้เรียนแบ่งกลุ่มศึกษาระยะในหนังสือเรียน

3.2 การพิสูจน์จะใช้วิธีการวิเคราะห์หรือสังเคราะห์ อยู่ในดุลยพินิจของผู้สอน แล้วช่วยกันสร้าง ผู้สอนตรวจสอบความถูกต้อง

วิธีดำเนินการวิจัย

การวิจัยครั้งนี้เป็นการวิจัยและพัฒนา (Research and Development หรือ R&D) เพื่อพัฒนารูปแบบการเรียนการสอน การพิสูจน์ทางเรขาคณิต สำหรับนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 ซึ่งผู้วิจัยแบ่งการวิจัยเป็น 4 ระยะ ดังนี้

ระยะที่ 1 ศึกษา วิเคราะห์ และสังเคราะห์ข้อมูลพื้นฐาน เพื่อหาแนวทางในการพัฒนารูปแบบการเรียนการสอนที่ช่วยส่งเสริมความสามารถในการพิสูจน์ทางเรขาคณิต สำหรับนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 (R1)

ระยะที่ 2 สร้าง และพัฒนารูปแบบการเรียนการสอน การพิสูจน์ทางเรขาคณิต และเครื่องมือการวิจัย (D1)

ระยะที่ 3 นำไปทดลองใช้กับนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 ครั้งที่ 1 (R2) และแก้ไขปรับปรุงรูปแบบการเรียนการสอน (D2) และนำไปทดลองใช้กับนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 ครั้งที่ 2 (R3)

ระยะที่ 4 ประเมินผล และแก้ไขปรับปรุงรูปแบบการเรียนการสอน (D3) เพื่อให้ได้รูปแบบการเรียนการสอน การพิสูจน์ทางเรขาคณิต ฉบับสมบูรณ์ สำหรับนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3

เครื่องมือที่ใช้ในการวิจัย

การเก็บรวบรวมข้อมูลเพื่อการวิจัยในครั้งนี้ประกอบด้วย เครื่องมือ 5 ชนิด ได้แก่ แผนการจัดการเรียนรู้ แบบทดสอบ วัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนคณิตศาสตร์ แบบวัดความสามารถ ในการพิสูจน์ทางเรขาคณิต แบบวัดระดับขั้นการคิดทางเรขาคณิต ของ Van Hiele และแบบบันทึกหลังการจัดการเรียนรู้

การเก็บรวบรวมข้อมูล

ผู้วิจัยได้ดำเนินการเก็บรวบรวมข้อมูล 2 ครั้ง กับนักเรียน กลุ่มตัวอย่างที่ได้มาจากการเลือกแบบเจาะจง 2 โรงเรียน คือนักเรียน โรงเรียนราชันนทาทจารย์ สามเสนวิทยาลัย 2 สังกัด สำนักงานเขตพื้นที่การศึกษามัธยมศึกษา เขต 1 จำนวน 44 คน ในภาคเรียนที่ 2 ปีการศึกษา 2558 เดือนมกราคมถึงกุมภาพันธ์ 2559 และ โรงเรียนสุรศักดิ์มนตรี สังกัดสำนักงานเขตพื้นที่การศึกษามัธยมศึกษาเขต 2 จำนวน 60 คน (2 ห้องเรียน ห้องเรียนละ 30 คน) ในภาคเรียนที่ 1 ปีการศึกษา 2559 เดือนมิถุนายนถึงเดือนกรกฎาคม 2559 ซึ่งผู้วิจัยได้ดำเนินการดังนี้

1. นำแบบทดสอบ วัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน คณิตศาสตร์ เรื่อง การให้เหตุผลเกี่ยวกับรูปสามเหลี่ยมและ

รูปสี่เหลี่ยม และแบบวัดระดับขั้นการคิดทางเรขาคณิตของ Van Hiele ที่ได้ผ่านการพิจารณาจากคณะกรรมการที่ปรึกษา วิทยานิพนธ์ และผู้ทรงคุณวุฒิ ซึ่งได้รับการปรับปรุงแก้ไขแล้ว มาทำการทดสอบก่อนเรียน กับนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 โรงเรียนราชันนทาทจารย์ สามเสนวิทยาลัย 2 ในภาคเรียนที่ 2 ปีการศึกษา 2558 และนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 โรงเรียนสุรศักดิ์มนตรี ในภาคเรียนที่ 1 ปีการศึกษา 2559 ที่เป็นกลุ่มตัวอย่าง โดยใช้เวลา 100 นาที

2. ดำเนินการสอนสาระการเรียนรู้ เรื่อง การให้เหตุผล เกี่ยวกับรูปสามเหลี่ยมและรูปสี่เหลี่ยม ตามแผนการจัดการเรียนรู้ ที่ผู้วิจัยสร้างขึ้นทั้งหมด 16 คาบ คาบละ 50 นาที โดยใช้ ขั้นตอนการเรียนรู้ของ Van Hiele เฉพาะแผนการจัดการเรียนรู้ ในคาบเรียนที่ 3 ถึง 12 เพื่อให้ให้นักเรียนพัฒนาการตามระดับขั้นการคิดทางเรขาคณิตของ Van Hiele อยู่ในระดับ 3 (การพิสูจน์อย่างมีแบบแผน) ซึ่งในแต่ละคาบผู้วิจัยได้บันทึกข้อมูลที่ได้จากการจัดกิจกรรมการเรียนรู้ ในแบบบันทึกหลังการจัดการเรียนรู้ เพื่อนำมาเป็นข้อมูลในการปรับปรุงแผนการจัดการเรียนรู้ที่นักเรียนจะเรียนรู้ต่อไปให้ดียิ่งขึ้น โดยสาระการเรียนรู้ของแผนการจัดการเรียนรู้เป็นดังนี้

แผนการจัดการเรียนรู้ที่ 1 คาบเรียนที่ 1 ประโยคเงื่อนไข และบทกลับของประโยคเงื่อนไข

แผนการจัดการเรียนรู้ที่ 2 คาบเรียนที่ 2 การให้เหตุผลทางเรขาคณิต

แผนการจัดการเรียนรู้ที่ 3 คาบเรียนที่ 3-4 ทฤษฎีบทเกี่ยวกับรูปสามเหลี่ยม และการนำไปใช้

แผนการจัดการเรียนรู้ที่ 4 คาบเรียนที่ 5-6 ทฤษฎีบทเกี่ยวกับความเท่ากันทุกประการของรูปสามเหลี่ยม (1)

แผนการจัดการเรียนรู้ที่ 5 คาบเรียนที่ 7 ทฤษฎีบทเกี่ยวกับความเท่ากันทุกประการของรูปสามเหลี่ยม (2)

แผนการจัดการเรียนรู้ที่ 6 คาบเรียนที่ 8-9 ทฤษฎีบทเกี่ยวกับรูปสี่เหลี่ยม (1)

แผนการจัดการเรียนรู้ที่ 7 คาบเรียนที่ 10 ทฤษฎีบทเกี่ยวกับรูปสี่เหลี่ยม (2)

แผนการจัดการเรียนรู้ที่ 8 คาบเรียนที่ 11-12 ทฤษฎีบทเกี่ยวกับรูปสี่เหลี่ยม (3)

แผนการจัดการเรียนรู้ที่ 9 คาบเรียนที่ 13 การสร้างรูปเรขาคณิตโดยใช้สันตรงและวงเวียน (1)

แผนการจัดการเรียนรู้ที่ 10 คาบเรียนที่ 14 การสร้างรูปเรขาคณิตโดยใช้สันตรงและวงเวียน (2)

แผนการจัดการเรียนรู้ที่ 11 คาบเรียนที่ 15-16 การสร้าง
รูปเรขาคณิตโดยใช้สันตรงและวงเวียน (3)

3. นำแบบวัดความสามารถในการพิสูจน์ทางเรขาคณิต
ไปให้นักเรียนทำในระหว่างที่มีการจัดการเรียนรู้ โดยแบ่งเป็น
4 ครั้ง คือ ครั้งที่ 1 นักเรียนทำแบบวัดความสามารถในการพิสูจน์
ทางเรขาคณิต ชุดที่ 1 จำนวน 2 ข้อ 8 คะแนน โดยครูนำไปใช้
ในแผนการจัดการเรียนรู้ที่ 3 ใช้เวลา 20 นาที ครั้งที่ 2 นักเรียน
ทำแบบวัดความสามารถในการพิสูจน์ทางเรขาคณิต ชุดที่ 2
จำนวน 2 ข้อ 12 คะแนน โดยครูนำไปใช้ในแผนการจัดการเรียนรู้
ที่ 6 ใช้เวลา 30 นาที ครั้งที่ 3 นักเรียนทำแบบวัดความสามารถ
ในการพิสูจน์ทางเรขาคณิต ชุดที่ 3 จำนวน 2 ข้อ 10 คะแนน
โดยครูนำไปใช้ในแผนการจัดการเรียนรู้ที่ 8 ใช้เวลา 30 นาที และ
ครั้งที่ 4 นักเรียนทำแบบวัดความสามารถในการพิสูจน์ทาง
เรขาคณิต ชุดที่ 4 จำนวน 2 ข้อ 10 คะแนน โดยครูนำไปใช้ในแผน
การจัดการเรียนรู้ที่ 11 ใช้เวลา 30 นาที

4. นำแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน
คณิตศาสตร์ เรื่องการให้เหตุผลเกี่ยวกับรูปสามเหลี่ยมและ
รูปสี่เหลี่ยม และแบบวัดลำดับชั้นการคิดทางเรขาคณิตของ
Van Hiele ฉบับเดิมมาทำการทดสอบหลังเรียนกับกลุ่มตัวอย่าง
โดยใช้เวลา 100 นาที

5. เขียนบันทึกหลังการจัดการเรียนรู้ ทุกคาบที่มีการ
จัดการเรียนรู้ เพื่อนำข้อมูลมาปรับปรุง และพัฒนาแผนการ
จัดการเรียนรู้ให้มีประสิทธิภาพ

ผลการวิจัย

ผลการนำรูปแบบการเรียนการสอนการพิสูจน์ทางเรขาคณิต ไปทดลองใช้ครั้งที่ 1

ผู้วิจัยได้นำรูปแบบการเรียนการสอนการพิสูจน์ทาง
เรขาคณิตไปทดลองใช้ครั้งที่ 1 กับนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3
โรงเรียนราชันนทาจารย์ สามเสนวิทยาลัย 2 จำนวน 44 คน
โดยผู้วิจัยขอเสนอผลการวิจัย 3 ด้าน คือ พัฒนาการในระดับ
ชั้นการคิดทางเรขาคณิตของ Van Hiele ผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน
คณิตศาสตร์ เรื่องการให้เหตุผลเกี่ยวกับรูปสามเหลี่ยมและ
รูปสี่เหลี่ยม และความสามารถในการพิสูจน์ทางเรขาคณิต
หลังการใช้รูปแบบการเรียนการสอนการพิสูจน์ทางเรขาคณิต
ดังตารางที่ 1 ถึงตารางที่ 3 ตามลำดับดังนี้

จากตารางที่ 1 พบว่าก่อนเรียนนักเรียนชั้นมัธยมศึกษา
ปีที่ 3 โรงเรียนราชันนทาจารย์ สามเสนวิทยาลัย 2 มีระดับชั้น
การคิดทางเรขาคณิตของ Van Hiele ในแต่ละระดับดังนี้ ชั้น 0
มากที่สุด คิดเป็นร้อยละ 52.27 รองลงมาคือชั้น 1 คิดเป็นร้อยละ
29.55 ชั้น 2 คิดเป็นร้อยละ 18.18 และไม่มีนักเรียนที่มีระดับชั้น
การคิดทางเรขาคณิตของ Van Hiele อยู่ในชั้น 3 แต่หลังจากนำ
รูปแบบการเรียนการสอนการพิสูจน์ทางเรขาคณิตที่ผู้วิจัยได้
พัฒนาไปใช้ ผลปรากฏว่า นักเรียนกลุ่มนี้มีระดับชั้นการคิด
ทางเรขาคณิตของ Van Hiele อยู่ในชั้น 3 มากที่สุด คิดเป็นร้อยละ
63.64 รองลงมาคือชั้น 1 คิดเป็นร้อยละ 22.73 และชั้น 2 คิดเป็น
ร้อยละ 13.63 ตามลำดับ

ตารางที่ 1 การเปรียบเทียบระดับชั้นการคิดทางเรขาคณิตของ Van Hiele ก่อนเรียนและหลังเรียน ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3
โรงเรียนราชันนทาจารย์ สามเสนวิทยาลัย 2

		ระดับชั้นการคิดทางเรขาคณิตของ Van Hiele			
		ชั้น 0	ชั้น 1	ชั้น 2	ชั้น 3
ก่อนเรียน	จำนวน (คน)	23	13	8	–
	ร้อยละ	52.27	29.55	18.18	–
หลังเรียน	จำนวน (คน)	–	10	6	28
	ร้อยละ	–	22.73	13.63	63.64

จากตารางที่ 2 พบว่าก่อนเรียนนักเรียนมีผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนคณิตศาสตร์ เรื่องการให้เหตุผลเกี่ยวกับรูปสามเหลี่ยมและรูปสี่เหลี่ยม คิดเป็นคะแนนเฉลี่ย 15.09 คะแนน จากคะแนนเต็ม 50 คะแนน แต่หลังจากนำรูปแบบการเรียนการสอนการพิสูจน์ทางเรขาคณิตที่ผู้วิจัยได้พัฒนาไปใช้ ผลปรากฏว่านักเรียนมีผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนคณิตศาสตร์ คิดเป็นคะแนนเฉลี่ย 31.98 คะแนน เพิ่มขึ้นจากเดิม 16.89 คะแนน หรือเพิ่มขึ้นร้อยละ 33.78

จากตารางที่ 3 พบว่า นักเรียนทำแบบวัดความสามารถในการพิสูจน์ทางเรขาคณิต โดยเรียงคะแนนจากมากที่สุดไปหาคะแนนน้อยที่สุด ได้ดังนี้ ชุดที่ 1 ได้คะแนนมากที่สุด

คิดเป็นร้อยละ 84.13 แบบวัดชุดนี้ตรวจสอบความรู้พื้นฐานเกี่ยวกับการให้เหตุผลทางเรขาคณิต ชุดที่ 4 ได้คะแนนคิดเป็นร้อยละ 67.50 แบบวัดชุดนี้ตรวจสอบการสร้างและการพิสูจน์ชุดที่ 2 ได้คะแนนคิดเป็นร้อยละ 66.08 แบบวัดชุดนี้ตรวจสอบการพิสูจน์เกี่ยวกับรูปสามเหลี่ยม และนักเรียนทำแบบวัดความสามารถในการพิสูจน์ทางเรขาคณิต ชุดที่ 3 ได้คะแนนน้อยที่สุดคิดเป็นร้อยละ 60 แบบวัดชุดนี้ตรวจสอบการพิสูจน์เกี่ยวกับรูปสี่เหลี่ยม นอกจากนี้คะแนนรวมจากการทำแบบวัดความสามารถในการพิสูจน์ทางเรขาคณิต 4 ชุด (คะแนนเต็ม 40 คะแนน) คะแนนเฉลี่ย 27.41 คะแนน คิดเป็นร้อยละ 68.53

ตารางที่ 2 ผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนคณิตศาสตร์ ก่อนเรียนและหลังเรียน ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 โรงเรียนราชันนทอาจารย์สามเสนวิทยาลัย 2

	ผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนคณิตศาสตร์		การเปลี่ยนแปลง
	คะแนนเฉลี่ย	ร้อยละ	
ก่อนเรียน	คะแนนเฉลี่ย	15.09	–
	ร้อยละ	30.18	–
หลังเรียน	คะแนนเฉลี่ย	31.98	เพิ่มขึ้น 16.89
	ร้อยละ	63.96	เพิ่มขึ้น 33.78

ตารางที่ 3 คะแนนจากการทำแบบวัดความสามารถในการพิสูจน์ทางเรขาคณิต เป็นรายชุดของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 โรงเรียนราชันนทอาจารย์สามเสนวิทยาลัย 2

	แบบวัดความสามารถในการพิสูจน์ทางเรขาคณิต				
	ชุดที่ 1 (8 คะแนน)	ชุดที่ 2 (12 คะแนน)	ชุดที่ 3 (10 คะแนน)	ชุดที่ 4 (10 คะแนน)	รวม 4 ชุด (40 คะแนน)
คะแนนเฉลี่ย	6.73	7.93	6	6.75	27.41
ร้อยละ	84.13	66.08	60	67.50	68.53

ผลการนำรูปแบบการเรียนการสอนการพิสูจน์ทางเรขาคณิตไปทดลองใช้ครั้งที่ 2

หลังจากผู้วิจัยได้ปรับปรุงรูปแบบการเรียนการสอนการพิสูจน์ทางเรขาคณิตจากการทดลองใช้ครั้งที่ 1 ผู้วิจัยได้นำรูปแบบการเรียนการสอนการพิสูจน์ทางเรขาคณิตไปทดลองใช้ครั้งที่ 2 กับนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 โรงเรียนสุรศักดิ์มนตรี จำนวน 2 ห้องเรียน ห้องเรียนละ 30 คน โดยผู้วิจัยขอเสนอผลการวิจัย 3 ด้าน คือ พัฒนาการในระดับชั้นการคิดทางเรขาคณิตของ Van Hiele ผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนคณิตศาสตร์ เรื่องการให้เหตุผลเกี่ยวกับรูปสามเหลี่ยมและรูปสี่เหลี่ยม และความสามารถในการพิสูจน์ทางเรขาคณิต หลังการใช้รูปแบบการเรียนการสอนการพิสูจน์ทางเรขาคณิต ดังตารางที่ 4 – ตารางที่ 6 ตามลำดับดังนี้

ตารางที่ 4 การเปรียบเทียบระดับชั้นการคิดทางเรขาคณิตของ Van Hiele ก่อนเรียนและหลังเรียน ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 โรงเรียนสุรศักดิ์มนตรี

		ระดับชั้นการคิดทางเรขาคณิตของ Van Hiele			
		ชั้น 0	ชั้น 1	ชั้น 2	ชั้น 3
ก่อนเรียน	จำนวน (คน)	5	22	33	–
	ร้อยละ	8.33	36.67	55	–
หลังเรียน	จำนวน (คน)	–	1	18	41
	ร้อยละ	–	1.67	30	68.33

จากตารางที่ 5 พบว่าก่อนเรียนนักเรียนมีผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนคณิตศาสตร์ เรื่องการให้เหตุผลเกี่ยวกับรูปสามเหลี่ยมและรูปสี่เหลี่ยม คิดเป็นคะแนนเฉลี่ย 21.08 คะแนน จากคะแนนเต็ม 50 คะแนน แต่หลังจากนำรูปแบบการเรียนการสอนการพิสูจน์ทางเรขาคณิตที่ผู้วิจัยได้พัฒนาไปใช้ ผลปรากฏว่านักเรียนมีผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนคณิตศาสตร์ คิดเป็นคะแนนเฉลี่ย 34.75 คะแนน เพิ่มขึ้นจากเดิม 13.67 คะแนน หรือเพิ่มขึ้นร้อยละ 27.34

จากตารางที่ 6 พบว่า นักเรียนทำแบบวัดความสามารถในการพิสูจน์ทางเรขาคณิต โดยเรียงคะแนนจากมากที่สุดไปหาคะแนนน้อยที่สุด ได้ดังนี้ ชุดที่ 2 ได้คะแนนมากที่สุด

จากตารางที่ 4 พบว่าก่อนเรียนนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 โรงเรียนสุรศักดิ์มนตรี มีระดับชั้นการคิดทางเรขาคณิตของ Van Hiele อยู่ในชั้น 2 มากที่สุด คิดเป็นร้อยละ 55.00 รองลงมาคือชั้น 1 คิดเป็นร้อยละ 36.67 และชั้น 0 คิดเป็นร้อยละ 8.33 และไม่มีนักเรียนที่มีระดับชั้นการคิดทางเรขาคณิตของ Van Hiele อยู่ในชั้น 3 แต่หลังจากนำรูปแบบการเรียนการสอนการพิสูจน์ทางเรขาคณิตที่ผู้วิจัยได้พัฒนาไปใช้ ผลปรากฏว่านักเรียนกลุ่มนี้มีระดับชั้นการคิดทางเรขาคณิตของ Van Hiele อยู่ในชั้น 3 มากที่สุด คิดเป็นร้อยละ 68.33 รองลงมาคือชั้น 2 คิดเป็นร้อยละ 30.00 และชั้น 1 คิดเป็นร้อยละ 1.67 ตามลำดับ

คิดเป็นร้อยละ 73.92 แบบวัดชุดนี้ตรวจสอบการพิสูจน์เกี่ยวกับรูปสามเหลี่ยม รองลงมาชุดที่ 1 ได้คะแนนคิดเป็นร้อยละ 69.13 แบบวัดชุดนี้ตรวจสอบความรู้พื้นฐานเกี่ยวกับการให้เหตุผลทางเรขาคณิต ชุดที่ 3 คิดเป็นร้อยละ 68.50 แบบวัดชุดนี้ตรวจสอบการพิสูจน์เกี่ยวกับรูปสี่เหลี่ยม และนักเรียนทำแบบวัดความสามารถในการพิสูจน์ทางเรขาคณิต ชุดที่ 4 ได้คะแนนน้อยที่สุด คิดเป็นร้อยละ 61.30 แบบวัดชุดนี้ตรวจสอบการสร้างและการพิสูจน์ นอกจากนี้คะแนนรวมจากการทำแบบวัดความสามารถในการพิสูจน์ทางเรขาคณิต 4 ชุด (คะแนนเต็ม 40 คะแนน) คะแนนเฉลี่ย 27.47 คะแนน คิดเป็นร้อยละ 68.68

ตารางที่ 5 ผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนคณิตศาสตร์ ก่อนเรียนและหลังเรียน ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 โรงเรียนสุรศักดิ์มนตรี

		ผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนคณิตศาสตร์	
		ก่อนเรียน	หลังเรียน
ก่อนเรียน	คะแนนเฉลี่ย	21.08	-
	ร้อยละ	42.16	-
หลังเรียน	คะแนนเฉลี่ย	34.75	เพิ่มขึ้น 13.67
	ร้อยละ	69.50	เพิ่มขึ้น 27.34

ตารางที่ 6 คะแนนจากการทำแบบวัดความสามารถในการพิสูจน์ทางเรขาคณิตเป็นรายชุดของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 โรงเรียนสุรศักดิ์มนตรี

	แบบวัดความสามารถในการพิสูจน์ทางเรขาคณิต				
	ชุดที่ 1 (8 คะแนน)	ชุดที่ 2 (12 คะแนน)	ชุดที่ 3 (10 คะแนน)	ชุดที่ 4 (10 คะแนน)	รวม 4 ชุด (40 คะแนน)
คะแนนเฉลี่ย	5.53	8.87	6.85	6.13	27.47
ร้อยละ	69.13	73.92	68.50	61.30	68.68

สรุปผล และอภิปรายผล

รูปแบบการเรียนการสอนการพิสูจน์ทางเรขาคณิต สำหรับนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 ที่ผู้วิจัยสร้างและพัฒนาขึ้นมีส่วนช่วยส่งเสริมพัฒนาการของนักเรียน ในระดับขั้นการคิดทางเรขาคณิตของ Van Hiele ให้อยู่ในระดับ 3 หรือขั้นการพิสูจน์อย่างมีแบบแผน (Formal Deduction) ตลอดจนมีส่วนช่วยให้นักเรียนทุกคนมีผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนคณิตศาสตร์ เรื่องการให้เหตุผลเกี่ยวกับรูปสามเหลี่ยมและรูปสี่เหลี่ยม หลังการเรียนสูงกว่าเกณฑ์ 60 เปอร์เซ็นต์ และความสามารถในการพิสูจน์ทางเรขาคณิตของนักเรียนทุกคน หลังการใช้รูปแบบการเรียนการสอนการพิสูจน์ทางเรขาคณิต สูงกว่าเกณฑ์ 60 เปอร์เซ็นต์ ทั้งนี้เป็นเพราะผู้วิจัยได้นำแผนภูมิสายงานวิเคราะห์ย้อนกลับ มาใช้ในการเรียนการสอนการพิสูจน์ซึ่งสอดคล้องกับงานวิจัยของ Linares (2008) ที่มีการนำวิธีการของ Solow คือ วิธีการเดินหน้า ถอยหลัง (Forward-Backward Method) ซึ่งวิธีการนี้เกี่ยวข้องกับการถามคำถามหลัก หรือกลยุทธ์ เพื่อไปถึงข้อความที่ต้องการพิสูจน์ ซึ่งเทคนิคแผนผังการพิสูจน์ แสดงให้เห็น

กระบวนการคิดของนักเรียน และเป็นแนวทางช่วยให้นักเรียน ได้สำรวจความคิดเริ่มต้นทางคณิตศาสตร์ และสอดคล้องกับงานวิจัยของทัศนีย์ (2553) ซึ่งพบว่านักเรียนมีความพึงพอใจต่อกิจกรรมการเรียนเรขาคณิตเรื่องวงกลม โดยใช้การเขียนพิสูจน์แบบแผนผังแสดงเหตุผลอยู่ในระดับมาก นั้นแสดงให้เห็นว่าแผนภูมิสายงานวิเคราะห์ย้อนกลับมีส่วนช่วยให้นักเรียนประสบความสำเร็จในการเขียนพิสูจน์ทางเรขาคณิต ซึ่งการเรียนการสอนการพิสูจน์นั้น ครูต้องใช้ทั้งศาสตร์และศิลป์ ทั้งนี้เพราะการพิสูจน์ต้องการทั้งความถูกต้อง ความสมเหตุสมผล และทักษะในการเรียบเรียงอย่างเป็นระบบอ่านแล้วทำความเข้าใจ และติดตามได้ง่าย รวมทั้งการใช้ภาษาที่ตรงกับสิ่งที่ต้องการสื่อสาร มีความกระชับ และสละสลวย และสิ่งสำคัญที่สุดครูไม่ควรมุ่งเน้นแต่การสอนด้านความรู้เท่านั้น โดยละเลยหัวใจดวงน้อยของนักเรียน ครูควรมีคำชมเมื่อนักเรียนทำถูกต้อง หรือมีการส่งงานครบถ้วนตรงตามเวลา หรือมีการให้รางวัลซึ่งเป็นการให้กำลังใจนักเรียนเป็นระยะ เพื่อกระตุ้นให้นักเรียนเกิดการเรียนรู้ ซึ่งเป็นไปตามทฤษฎีการวางเงื่อนไขของ Skinner

ข้อเสนอแนะ

จากผลการวิจัยการพัฒนารูปแบบการเรียนการสอน การพิสูจน์ทางเรขาคณิต สำหรับนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 ผู้วิจัยขอเสนอแนวทางสำหรับครูผู้สอนในการจัดการเรียนรู้อย่างนี้

1. การพิสูจน์ทางเรขาคณิต ครูต้องให้นักเรียนเริ่มต้นวิเคราะห์จากสิ่งที่ต้องการพิสูจน์ (ผล) ไปสู่สิ่งที่โจทย์กำหนดให้ (เหตุ) และเขียนการพิสูจน์โดยเรียงเรียงจากเหตุไปสู่ผล
2. เทคนิคที่มีส่วนช่วยส่งเสริมความสามารถในการพิสูจน์ของนักเรียน คือ แผนภูมิสายงานวิเคราะห์ย้อนกลับ ซึ่งใช้เป็นร่างแนวคิดในการพิสูจน์ และแผนผังความคิด ซึ่งทำให้นักเรียน เชื่อมโยงความรู้ทางเรขาคณิต
3. ควรมีการสร้างองค์ความรู้ใหม่จากประสบการณ์เดิมเกี่ยวกับสาระการเรียนรู้เรขาคณิต
4. ควรมีการเสริมแรง การให้รางวัลเพื่อเป็นขวัญกำลังใจ และการฝึกซ้ำ
5. ความเข้าใจของครูเกี่ยวกับนักเรียนเป็นสิ่งสำคัญ การสอนด้วยหัวใจของครูจะเป็นแรงผลักดันอย่างมากต่อการเรียนรู้ของนักเรียน
6. ควรมีการกำกับติดตามการทำงานของนักเรียน และการให้ข้อมูลย้อนกลับอย่างสม่ำเสมอ
7. ควรมีการประเมินผลขณะเรียนรู้ (Assessment as Learning) การประเมินผลเพื่อเรียนรู้ (Assessment for Learning) และการประเมินผลการเรียนรู้ (Assessment of Learning)

ข้อเสนอแนะในการวิจัยครั้งต่อไป

1. ควรมีการศึกษาความสัมพันธ์ระหว่างระดับขั้นการคิดทางเรขาคณิตของ Van Hiele กับความสามารถในการพิสูจน์ทางเรขาคณิต หลังการทดลองใช้รูปแบบการเรียนการสอน การพิสูจน์ทางเรขาคณิต
2. ควรมีการวิจัยเกี่ยวกับพฤติกรรม และรูปแบบการเรียน (Learning Style) ของนักเรียนที่มีผลต่อความสามารถในการพิสูจน์

กิตติกรรมประกาศ

งานวิจัยนี้ได้รับการสนับสนุนจากสถาบันส่งเสริม การสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี (สสวท.)

เอกสารอ้างอิง

- ทัศนีย์ มาลาพันธ์. (2553). *การศึกษาการจัดกิจกรรม การเรียนเรขาคณิตเรื่องวงกลม โดยการเขียนพิสูจน์ แบบแผนผังแสดงเหตุผล สำหรับนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 โรงเรียนข้าป่างามวิทยาคมจังหวัดฉะเชิงเทรา* (วิทยานิพนธ์ปริญญาโท). มหาวิทยาลัยราชภัฏพระนคร, กรุงเทพฯ.
- ยุพิน พิพิธกุล. (2545). *การเรียนการสอนคณิตศาสตร์ยุคปฏิรูป การศึกษา*. กรุงเทพฯ: บริษัท บพิชการพิมพ์ จำกัด.
- สิริพร ทิพย์คง. (2532). แวนฮิลโมเดล : ลำดับขั้นตอนการเรียนรู้ เรขาคณิต. *วารสารศึกษาศาสตร์ปริทัศน์*, 5(3), 91–99.
- สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี. (2555ก). *ทักษะและกระบวนการทางคณิตศาสตร์* (พิมพ์ครั้งที่ 3). กรุงเทพฯ: บริษัท 3-คิว มีเดีย จำกัด.
- สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี. (2555ข). *ครุคณิตศาสตร์มืออาชีพ เส้นทางสู่ความสำเร็จ*. กรุงเทพฯ: บริษัท 3-คิว มีเดีย จำกัด.
- สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี. (2557). *หนังสือเรียนรู้เพิ่มเติมเพื่อเสริมศักยภาพคณิตศาสตร์ ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4–6. “ตรรกศาสตร์และการพิสูจน์”*. กรุงเทพฯ: บริษัทพัฒนาคุณภาพวิชาการ (พว.) จำกัด.
- อัมพร ม้าคอง. (2557). *คณิตศาสตร์สำหรับครูมัธยม*. กรุงเทพฯ: โรงพิมพ์แห่งจุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย.
- Bieda, K. N. (2010). Enacting proof-related tasks in middle school mathematics: Challenges and opportunities. *Journal for Research in Mathematics Education*, 41(4), 351–382.
- Donna, R. (2012). *Styles of proof*. Retrieved from <http://mathbitsnotebook.com/Geometry/BasicTerms/ BTproofs.html>
- Golzy, J. (2008). *A cultural study of classroom discourse and its impact on students' initiation of geometry proofs* (Doctoral dissertation). Available from ProQuest Dissertation and Theses database. (UMI No. 3320455)
- Lee, K. (2011). *Students' logical reasoning and mathematical proving of implications* (Doctoral dissertation). Available from ProQuest Dissertation and Theses database. (UMI No. 3454803)

- Linares, L. A. (2008). *The process of making meaning: The interplay between teachers' knowledge of mathematical proofs and their classroom practices* (Unpublished master's thesis). University of California, Oakland.
- National Council of Teachers of Mathematics (NCTM). (2000). *Principles and standards for school mathematics*. Reston, VA: Author.
- Translated Thai References**
- Makanong, A. (2014). *Mathematics for mathayom teachers*. Bangkok, Thailand: Chulalongkorn University Press. [in Thai]
- Malaphan, T. (2010). *A study of mathematical learning activities on circle using reasoning flow proof of mathayomsuksa 3 students at Champhangamwittayakom school in Chachoengsao province* (Unpublished master's thesis). Phranakhon Rajabhat University, Bangkok. [in Thai]
- Pipithakul, Y. (2002). *Mathematics instructional in educational reform era*. Bangkok, Thailand: Bopit Printing Co., Ltd. [in Thai]
- The Institute for the Promotion of Teaching Science and Technology. (2012a). *Mathematical skill and process* (3rd ed.). Bangkok, Thailand: 3Q Media Co., Ltd. [in Thai]
- The Institute for the Promotion of Teaching Science and Technology. (2012b). *Professional mathematics teacher way to success*. Bangkok, Thailand: 3Q Media Co., Ltd. [in Thai]
- The Institute for the Promotion of Teaching Science and Technology. (2014). *Supplementary book for enhancing mathematical competency mathayomsuksa 4-6 "Logic and proof"*. Bangkok, Thailand: Academic development Co., Ltd. [in Thai]
- Thipkong, S. (1989). Van Hiele model: Geometric learning hierarchy. *Kasetsart Educational Review*, 5(3), 91-99. [in Thai]